Kartkówka 12.04.2018

Zadanie 1. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+xy+3y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) w punkcie $(0,0)$,

(b) w każdym innym punkcie.

(a) Ze definicji funkcji f wyznaczamy, że

$$f(x,0) = \frac{2x^3 + x\cdot 0 + 3\cdot 0^3}{x^2+0^2} = \frac{2x^3}{x^2} = 2x \qquad \text{dla } x \neq 0,$$

ale również $f(0,0) = 0$, a więc $f(x,0) = 2x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Pochodną tej funkcji w zerze jest 2, a więc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$.

Podobnie wyznaczamy $f(0,y) = 3y$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 3$.

(b) Jeśli $(x,y) \neq (0,0)$, to na pewnym otoczeniu punktu (x,y) funkcja f jest zadana górnym wzorem, więc możemy bezpośrednio obliczyć pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(6x^2+y)(x^2+y^2) - (2x^3+xy+3y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x+9y^2)(x^2+y^2) - (2x^3+xy+3y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Uwaga. Łatwo się przekonać (np. przez podstawienie biegunowe), że granicą funkcji $\frac{2x^3+3y^3}{x^2+y^2}$ w zerze jest zero, natomiast funkcja $\frac{xy}{x^2+y^2}$ granicy nie posiada. W konsekwencji funkcja f nie ma w zerze granicy, a tym bardziej różniczki. Jak widać, nie przeszkadza jej to posiadać pochodnych cząstkowych w każdym punkcie płaszczyzny.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy poniższe zdania są prawdziwe dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i punktu $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$

Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ istnieją, to różniczka $D_p f$ również istnieje.	TAK/<u>NIE</u>
Jeśli różniczka $D_p f$ istnieje, to pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ również istnieją.	<u>TAK</u>/NIE
Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ istnieją na całej płaszczyźnie i są funkcjami ciągłymi, to różniczka Df również istnieje na całej płaszczyźnie.	<u>TAK</u>/NIE
Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ istnieje, to pokrywa się z pochodną funkcji $g(t) = f(t, p_2)$ w punkcie $t = p_1$.	<u>TAK</u>/NIE

NIE. Z istnienia pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ nie wynika istnienie różniczki $D_p f$, czego przykładem jest funkcja f z poprzedniego zadania.

TAK. Jeśli różniczka D_p istnieje, to możemy w jej definicji podstawić ciąg $(h_1, h_2) \to 0$ szczególnej postaci, a mianowicie $(h, 0)$, gdzie $h \to 0$. Otrzymujemy

$$\frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2) - D_p f(h, 0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

po przekształceniu

$$\frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2)}{h} \xrightarrow{h \to 0} D_p f(1, 0),$$

a więc pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ istnieje i jest równa $D_p f(1, 0)$. Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = D_p f(0, 1)$.

TAK. Istotnie, istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych pociąga za sobą różniczkowalność. Chętnym polecam przestudiowanie dowodu tego twierdzenia w skrypcie Pawła Strzeleckiego (Twierdzenie 2.16), a wszystkim – przeczytanie uwagi następującej po dowodzie.

TAK. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ to z definicji

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2)}{h},$$

natomiast pochodna $g'(p_1)$ to z definicji

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(p_1 + h) - g(p_1)}{h}.$$

Jeśli przypomnieć sobie związek f i g, jedno i drugie okazuje się być tym samym. Ta prosta obserwacja sprowadza obliczanie pochodnych cząstkowych do obliczaniach zwyczajnych pochodnych, jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania.